ПРОЦЕССЫ ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА С ИММИГРАЦИЕЙ: КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ И ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ

Рахматуллаев Абдулла Хасан ўғли
Карши Государственних Университеть
abdullaraxmatullayev55@gmail.com

Аннотация: Мы исследуем модель эволюции частиц, называемая ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона с иммиграцией, в котором размер популяции частиц, образует однородную цепь Маркова с пространством возможных состояний в этом работе.

Ключовой словы: Гальтона-Ватсона, процес, иммиграци, итераци, рекуррент, момент, вариант, степен.

Введение:

В этом работе мы исследуем модель эволюции частиц, называемая ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона с иммиграцией (ГВИ), в котором размер популяции частиц X_n, $n \in \mathbf{N}_0$, образует однородную цепь Маркова с пространством возможных состояний $S \subseteq \mathbf{N}_0$. Рассматриваемый процесс обычно определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{nk} + \eta_n, \quad n \in \mathbf{N},$$

где $\{\xi_{nk}\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин интерпретируются как число непосредственных потомков k-й частицы $(n-1)$-го поколения, а независимые одинаково распределенные величины η_n не зависящих от ξ_{nk}, как число иммигрантов в момент n частиц.

Пусть $X_0 = 0$ и величины ξ_{nk} имеют общее распределение $p_k := \mathsf{P}\{\xi_{11} = k\}$, а с вероятностью $h_j := \mathsf{P}\{\eta_1 = j\}$ в каждый момент времени $n \in \mathbf{N}$ в популяцию поступают ровно $j \in \mathbf{N}_0$ частицы-иммигранты извне. Вновь появившиеся частицы в дальнейшем претерпевают превращение по случайному закону $\{p_j\}$. Всюду в этом параграфе предположим, что $p_0 > 0$ и $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} h_j = 1$.

Обозначим через $p_{ij}^{(n)} = \mathsf{P}_i\{X_n = j\}$ переходные вероятности из состояния i в состояние j за n шагов процесса ГВИ. Пусть

$$\mathrm{P}_n^{(i)}(s) := \mathsf{E}_i s^{X_n} = \sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} s^j .$$

Обозначив $G(s) := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} h_j s^j$ и $F(s) := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} p_j s^j$, находим, что

$$\mathrm{P}_{n+1}^{(i)}(s) = G(s)\cdot \mathrm{P}_n^{(i)}\left(F(s)\right). \qquad (1.5.1)$$

Следовательно

$$\mathrm{P}_n^{(i)}(s) = \left[F_n(s)\right]^i \prod_{k=0}^{n-1} G\left(F_k(s)\right), \qquad (1.5.2)$$

где $F_n(s)$ итерации ПФ $F(s)$ определены в (1.1.3). Из (1.5.2) видно, что вероятности $\{p_{ij}^{(n)}\}$ полностью определяются при помощи распределений вероятностей $\{p_j\}$ и $\{h_j\}$. Из равенства (1.5.2) имеем

$$\mathsf{E}_i X_n = \sum_{j\in S} j p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \left(\dfrac{a}{A-1} + i\right)A^n - \dfrac{a}{A-1}, & A \neq 1, \\ a n + i, & A = 1, \end{cases}$$

где $a = G'(1)$. Отсюда видно, что классификация состояний цепи $\{X_n\}$ зависит от значения параметра $A = F'(1)$ – среднего числа непосредственных потомков одной частицы. Процесс $\{X_n\}$ называется докритическим, критическим и надкритическим, если $A < 1$, $A = 1$ и $A > 1$, соответственно.

Литература и методология:

Вышеописанный процесс впервые рассмотрен Хиткотом [C.Heathcote (1965)] в 1965 году. В дальнейшем свойства состояний процесса ГВИ а также задача существования и единственности инвариантной меры для цепи $\{X_n\}$ исследовались в работах Сенеты [JRSS-1968, AAP-1969, JAP-1971], Пэйкса [JAP-1971, JAMS-12(4)-1971, JAMS-13-1972, AAP-1979] и многих других авторов. При этом предполагались выполнения моментных условий для ПФ $F(s)$ и $G(s)$. Сенетой [JRSS-1968, AAP-1969, JAP-1971] исследованы свойства эргодичности процесса ГВИ $\{X_n\}$. Им было доказано, что в случаях $A < 1$ существует единственная инвариантная мера $\{\mu_k, k \in S\}$, причем $\mu_0 = 1$. Хиткот [JRSS-28B-1966] и Пэйкс [JAP-8-1971] показали, что в надкритическом случае состояние S будет невозвратным. В критическом случае, если момент $\alpha := G'(1)$ конечный, то S может быть невозвратным, нуль-возвратным или эргодичным. В этом случае, если дополнительно предположить $2B := F''(1) < \infty$, то свойства S зависят от значения параметра $\lambda = \alpha/B$: если $\lambda > 1$ или $\lambda < 1$, то S невозвратно или нуль-возвратно, соответственно. В случае когда $\lambda = 1$, Пэйкс [JAMS-12-1971] и Зубков [ТВП-17-1972] изучали необходимые и достаточные условия для нуль-возвратности S. Предельное распределение для состояний критического процесса $\{X_n\}$ впервые найдено Сенетой [JRSS-32B-1970]. Им было доказано, что при условии $0 < \lambda < \infty$ нормированный процесс X_n/n, имеет предельное Гамма распределение с функцией плотности

$$\frac{1}{B\Gamma(\lambda)}\left(\frac{x}{B}\right)^{\lambda-1} e^{-x/B}, \qquad x > 0,$$

где $\Gamma(*)$ – Гамма функция Эйлера. Этот результат независимо от Сенеты был установлен, также, Пэйксом [JAMS-12(4)-1971].

Более поздние исследования по асимптотическому свойству состояний процесса ГВИ содержит работы Учимуры и Саито [2015, 2012, 2011], в которых рассмотрены процессы Бернуллиевского типа, то есть величины ξ_{nk} и η_n подчиняются закону Бернулли. Очевидно, что процессы Бернуллиевского типа является частным случаем в теории ветвящихся процессов. В этом смысле результаты настоящего параграфа обобщают результаты вышеупомянутых работ.

Результатаы:

Сначала мы интересуемся с предельным поведением отношений $p_{ij}^{(n)} \big/ p_{00}^{(n)}$ для любых $i, j \in S$. Обозначив $\Phi_n(s) := \Phi_n^{(0)}(s)$, из (1.5.2) имеем

$$\frac{\Phi_n^{(i)}(s)}{\Phi_n(s)} \ \mathrm{s} \ \ \mathrm{s} \to q^i, \qquad (1.5.3)$$

при $n \to \infty$, так как $F_n(s) \to q$ для всех $0 \le s < 1$ (см. (1.1.4)). В частности, если в (1.5.3) положим $s = 0$, то $p_{i0}^{(n)} \big/ p_{00}^{(n)} \to q^i$. С целью получить утверждение в общем случае для любого $j \in S$, из (1.5.2) выпишем $\Phi_{n+1}(s) = \Phi_n(s) \cdot G(F_n(s))$ и отсюда, вычислим производных j-го порядка

$$\frac{\partial^j \Phi_{n+1}(s)}{\partial s^j} = \frac{\partial^j \Phi_n(s)}{\partial s^j} \cdot G(F_n(s)) + D_{j,n}(s),$$

для всех $0 \le s < 1$, где выражение $D_{j,n}(s)$ представляет собой степенной ряд с неотрицательными коэффициентами. Поскольку $p_{0j}^{(n)} = \partial^j \Phi_{n+1}(s) \big/ \partial s^j \Big|_{s=0}$, из последних полученных соотношений, полагая $s = 0$, находим

$$\frac{p_{0j}^{(n+1)}}{p_{00}^{(n+1)}} \ \mathrm{i} \ \frac{p_{0j}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}}.$$

Так что варианта $\left\{p_{0j}^{(n)} \big/ p_{00}^{(n)}\right\}$ монотонно возрастает при $n \to \infty$. В наших условиях $p_{00}^{(n)} > 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Поэтому эта варианта, возрастая, сходится к конечному неотрицательному пределу, которого обозначим u_j:

$$\frac{p_{0j}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} - u_j < \infty . \qquad (1.5.4)$$

Теперь рассмотрим отношение $p_{ij}^{(n)} \big/ p_{00}^{(n)}$. Обозначив через $U_n^{(i)}(s)$ соответствующую ПФ, напишем следующие соотношения:

$$U_n^{(i)}(s) := \sum_{j \in S} \frac{p_{ij}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} s^j = \left[F_n(s)\right]^i \frac{\Pi_n(s)}{\Pi_n(0)} = \left[F_n(s)\right]^i U_n(s) \qquad (1.5.5)$$

где $U_n(s) = U_n^{(1)}(s)$.

Теорема 1.14. *Для всех* $j \in S$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_{ij}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} = q^i u_j < \infty . \qquad (1.5.6)$$

Соответствующая к $u_j = \lim_{n \to \infty} p_{0j}^{(n)} \big/ p_{00}^{(n)}$ *ПФ* $U(s) = \sum_{j \in S} u_j s^j$ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$s \cdot U(s) = G(s) U\big(F(s)\big), \qquad (1.5.7)$$

в области ее сходимости, где $s := G(q)$.

Доказательство. Утверждение (1.5.6) немедленно следует из (1.5.4), (1.5.5) и того, что $F_n(s) \to q$ равномерно для всех $0 \le s \le r < 1$, при $n \to \infty$.

Чтобы доказать справедливости уравнения (1.5.7), комбинируем соотношений (1.5.1) и (1.5.5) с известным нам равенством $\Pi_{n+1}(s) = \Pi_n(s) \cdot G\big(F_n(s)\big)$, и имеем следующие равенства:

$$\Upsilon^{(i)}_{n+1}(s) = [F_{n+1}(s)]^i\, \Upsilon_{n+1}(s) = [F_n(F(s))]^i \frac{\Pi_{n+1}(s)}{\Pi_{n+1}(0)}$$

$$= [F_n(F(s))]^i \frac{G(s)\cdot\Pi_n(F(s))}{G(F_n(0))\cdot\Pi_n(0)} = \frac{G(s)}{G(F_n(0))}\Upsilon^{(i)}_n(F(s)).$$

Отсюда, переходя в предел, получаем искомое.

Теорема доказана. □

Обсуждение:

Как степенной ряд, ПФ $\Upsilon(s)$ представляет собой непрерывную функцию в области $0 \le s < 1$. Согласно свойствам ПФ она сходится для всех $s \in [0;1-\varepsilon]$ и для любого произвольно малого положительного числа $\varepsilon > 0$.

Последовательное применение итерации в уравнении (1.5.7), приводит нас к следующему соотношению:

$$\sigma^n \Upsilon(s) = \Pi_n(s)\Upsilon(F_n(s)). \qquad (1.5.8)$$

На языке переходных вероятностей уравнение (1.5.8) пишется в виде

$$\sigma^n \cdot \upsilon_j = \sum_{i\in S} \upsilon_i p_{ij}^{(n)}. \qquad (1.5.9)$$

Равенство (1.5.9) указывает на то, что множество неотрицательных чисел $\{\upsilon_j, j \in S\}$ представляет собой инвариантную меру для процесса $\{X_n\}$.

В силу условия $p_{00}^{(n)} > 0$ и равенства (1.5.9), все $\upsilon_j < \infty$ и $\upsilon_j > 0$ для $j \in S$. А также $\upsilon_0 = 1$. Тогда по определению процесса $\{X_n\}$ и, согласно равенствам (1.5.8) и (1.5.9), имеем соотношения

$$\sigma^n = \sigma^n \cdot \upsilon_0 = \sum_{i \in S} \upsilon_i p_{i0}^{(n)}$$

$$= \sum_{i \in S} \upsilon_i P_{i0}(n) p_{00}^{(n)} = p_{00}^{(n)} \sum_{i \in S} \upsilon_i P_{10}^{i}(n),$$

где $P_{i0}(n) = \mathrm{P}_i\{Z_n = 0\}$ есть вероятность попадания в состояние нуль процесса $\{Z_n\}$ без иммиграции порожденного ПФ $F(s)$. Поскольку эта вероятность равна $F_n(0)$, то $\sigma^n = \mathrm{P}_n(0)\,\mathrm{U}\left(F_n(0)\right)$ и, следовательно

$$\mathrm{U}\left(F_n(0)\right) = \frac{\sigma^n}{p_{00}^{(n)}}, \qquad (1.5.10)$$

для любых $n \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим случай $A \neq 1$. В силу непрерывности $\mathrm{U}(s)$, из равенства (1.5.10) получаем

$$\frac{\sigma^n}{p_{00}^{(n)}} \to \mathrm{U}(q) < \infty, \qquad (1.5.11)$$

при $n \to \infty$. Здесь мы учитывали то, что $F_n(0) \to q$. Собирая, теперь, вместе соотношений (1.5.3), (1.5.6) и (1.5.11), напишем следующую теорему.

Теорема 1.15. *Если* $A \neq 1$, *то при* $n \to \infty$

$$\sigma^{-n} \mathrm{P}_n^{(i)}(s) \to q^i \frac{\mathrm{U}(s)}{\mathrm{U}(q)},$$

и для переходных вероятностей справедливо соотношение

$$\sigma^{-n} p_{ij}^{(n)} \to \frac{q^i \upsilon_j}{\sum_{k \in S} \upsilon_k q^k},$$

для всех $i, j \in S$, *где* $\sigma = G(q)$.

Замечание 1.6. В случае $A < 1$, если $a = G'(1)$ конечен, то $\{u_j, j \in S\}$ является инвариантным распределением с конечным среднем значением

$$U'(s - 1) = \sum_{j \in S} j u_j = \frac{U(1)a}{1 - A}. \qquad (1.5.12)$$

Действительно, имеем соотношения

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{G(F_k(s)) - G(F_k(0))}{G(F_k(s))} < \ln U_n(s) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{G(F_k(s)) - G(F_k(0))}{G(F_k(0))}.$$

Здесь мы воспользовались неравенствами $(b - a)/b < \ln(b/a) < (b - a)/a$, для $0 < b < a$. В силу теоремы о среднем, находим

$$G(F_k(s)) - G(F_k(0)) = a\mu \cdot (F_k(s) - F_k(0)),$$

где $h_1 < a\mu < a$. Из полученных соотношений, находим, что

$$\ln U(s) = \frac{a\mu}{\tilde{h}_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} [F_k(s) - F_k(0)],$$

где $h_0 < \tilde{h}_0 < 1$. В свою очередь, в силу формулы (1.2.7)

$$F_k(s) - F_k(0) \sim [A(0) - A(s)] \cdot A^k,$$

при $k \to \infty$, где функция $A(s)$ определена в равенстве (1.2.8) и $A(s - 1) = 0$. Таким образом, $U(s - 1) < \infty$. Из уравнения (1.5.7) следует, что

$$U'(s) = G'(s)U(F(s)) + G(s)U'(F(s))F'(s).$$

Полагая здесь $s - 1$, получаем (1.5.12). □

Заключение:

Теорема 1.16. *Пусть A №1. Тогда всегда существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение уравнения (1.5.7), такое, что* $\mathrm{U}(q - s) = L(s)\ \mathrm{O}\ \mathrm{S}_0$, *где* S_0 *– класс ММ функций в нуле.*

Доказательство. Предположим, что существует еще одно решение $\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}(s)$ этого уравнения. Тогда $\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}(s)$, так же как и $\mathrm{U}(s)$ монотонно возрастает. Поскольку $F_n(0) - q$, то для всякого $s\ \mathrm{O}\,[0;q)$, всегда найдется $k\ \mathrm{O}\ \mathbf{N}$, такое что $F_k(0)\ \mathrm{J}\ \ s < F_{k+1}(0)$. Следовательно, из (1.5.8) находим

$$\frac{\mathrm{U}(s)}{\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}(s)} = \frac{\mathrm{U}\big(F_n(s)\big)}{\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}\big(F_n(s)\big)}\ \mathrm{J}\ \ \frac{\mathrm{U}\big(F_{n+k+1}(0)\big)}{\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}\big(F_{n+k}(0)\big)} = \frac{\mathrm{U}\big(F_{n+k+1}(0)\big)}{\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}\big(F_{n+k+1}(0)\big)}\ \text{Ч}\ \frac{\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}\big(F_{n+k+1}(0)\big)}{\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}\big(F_{n+k}(0)\big)}.$$

Поскольку $\mathrm{u}_0 = 1$, то в силу (1.5.8) $\mathrm{U}\big(F_n(0)\big)\big/\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}\big(F_n(0)\big) = 1$. Следовательно,

$$\frac{\mathrm{U}(s)}{\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}(s)}\ \mathrm{J}\ \ \frac{\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}\big(F_{n+k+1}(0)\big)}{\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}\big(F_{n+k}(0)\big)} = \frac{\mathrm{s}}{G\big(F_{n+k}(0)\big)}.$$

Переход в предел при n ® Г нам дает, что $\mathrm{U}(s)\big/\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}(s)\ \mathrm{J}\ \ 1$. Аналогичным путем можно получить и обратное неравенство $\mathrm{U}(s)\big/\mathbf{U\!\!\!\!\!\!U}(s)\ \mathrm{i}\ \ 1$. Найденные неравенства говорят о единственности решения уравнения (1.5.7) для значений $s\ \mathrm{O}\,[0;q)$.

Далее, обозначая $g(s) = G(q - s)$ и $f(s) = q - F(q - s)$, уравнение (1.5.7) запишем в виде

$$\mathrm{s}\ \text{Ч}L(s) = g(s)\,\text{Ч}L\big(f(s)\big), \qquad s\ \mathrm{O}\,[0;q). \qquad (1.5.14)$$

Убедимся, что функция $f(s)\big/s$ монотонно убывает на множестве $0\ \mathrm{J}\ \ s < q$, принимая максимальные и минимальные значения $\mathrm{b} = \lim_{s\ddot{\imath}0} f(s)\big/s$ и

$f(q)/q = 1 - p_0/q$, соответственно, где по-прежнему, $\beta = F^{\leftarrow}(q)$. Функция $L(s)$ тоже является монотонно убывающей на этом же множестве и, кроме этого $\lim_{s\downarrow 0} g(s) = \sigma$. Тогда для любого $\lambda \in [\beta;1]$ имеем

$$\frac{L(f(s))}{L(s)} = \frac{L\left(\frac{f(s)}{s}s\right)}{L(s)} \geq \frac{L(\beta s)}{L(s)} \geq \frac{L(\lambda s)}{L(s)} \geq 1.$$

С другой стороны, согласно (1.5.14),

$$\frac{L(f(s))}{L(s)} = \frac{\sigma}{g(s)}\ \sigma\ \ \sigma \to 1,$$

при $s \downarrow 0$. Следовательно,

$$\lim_{s\downarrow 0} \frac{L(\lambda s)}{L(s)} = 1,$$

для любого $\lambda \in [\beta;1]$. Нетрудно убедиться в том, что последнее соотношение справедливо для любого $\lambda \in \mathbf{R}_+$. Так что, функция $L(s) = \Upsilon(q - s)$ является медленно меняющаяся при $s \downarrow 0$.

Теорема доказана.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Хиткот[C.Heathcote (1965)] в 1965 году.
2. Сенеты [JRSS-1968, AAP-1969, JAP-1971].
3. Пэйкса [JAP-1971, JAMS-12(4)-1971, JAMS-13-1972, AAP-1979].
4. Хиткот [JRSS-28B-1966]